Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2022»
Заключительный тур
13 марта 2022 года
10 класс

▷ **1.** Сколько существует натуральных чисел, состоящих из одних единиц, не превосходящих гугол (т.е. число 10^{100}) и кратных числу, состоящему из 9 девяток?

Решение:

$$\underbrace{11...1}_{k} \vdots 999999999 = 9 \cdot 9 \cdot 123456789$$

```
_111111111 |9
  9        |123456789
 _21
  18
  _31
   27
   _41
    36
    _51
     45
     _61
      54
      _71
       63
       _81
        81
         0
```

$$\underbrace{9 \cdot 9}\cdot 37 \cdot 333667$$

$$k = 81m \leqslant 100$$

где $81m$ - кол-во единиц в числе, m - кол-во чисел. $m = 1$ **Ответ:** одно.

▷ **2.** Найдите целое значение параметра b, при котором наименьший член последовательности $x_n = 3n - 9\sqrt{n-2} + b$ ближе всего к нулю $(n \in N)$.

Решение:

$$x_n = 3(n-2) - 9\sqrt{n-2} + b + 6 = 3[(\sqrt{n-2})^2 - 2\frac{3}{2}\sqrt{n-2} + \frac{9}{4}] + b + 6 - \frac{27}{4} =$$

$$= 3(\sqrt{n-2} - \frac{3}{2})^2 + \underbrace{b + 6 - \frac{27}{4}}_{b-\frac{3}{4}} \geqslant b - \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{n-2} = \frac{3}{2}$$

$$n - 2 = \frac{9}{4}$$

$$n = 4\frac{1}{4}$$

n - целое
$n = 4,\ x_4 = 12 - 9\sqrt{2} + b$
$n = 5,\ x_5 = 15 - 9\sqrt{3} + b$

$$12 - 9\sqrt{2} + b \overset{<}{\bigvee} 15 - 9\sqrt{3} + b$$

$$-3 - 9\sqrt{2} \overset{<}{\bigvee} -9\sqrt{3}$$

$$-1 - 3\sqrt{2} \overset{<}{\bigvee} -3\sqrt{3}$$

$$1 + 3\sqrt{2} \overset{>}{\bigwedge} 3\sqrt{3}$$

$$1 + 18 + 6\sqrt{2} \overset{>}{\bigwedge} 27$$

$$6\sqrt{2} \overset{>}{\bigwedge} 8$$

$$3\sqrt{2} \overset{>}{\bigwedge} 4$$

$$18 \overset{>}{\bigwedge} 16$$

Наименьший член $x_4 = 12 - 9\sqrt{2} + b$

$$12 - 9 \cdot 1,42 < 12 - 9\sqrt{2} < 12 - 9 \cdot 1,41$$

$$-0,78 < 12 - 9\sqrt{2} < -0,69$$

$$b - 0,78 < x_4 < b - 0,69$$

$b = 0,\ -0,78 < x_4 < -0,69$
$b = 1,\ 0,22 < x_4 < 0,31$
При $b = 1$, x_4 - ближе к нулю. **Ответ:** $b = 1$.

▷ **3.** Функция f определена на множестве целых неотрицательных чисел и имеет значения на этом множестве. Для любых n на этом множестве имеет место равенство $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3$. Найдите $f(2022)$.

Решение: При $n = 0$, неравенство выглядит так: $f(0) + f(f(0)) = 3$. Поскольку числа должны быть целыми и неотрицательными есть 4 варианта: 0 и 3, 3 и 0, 2 и 1, 1 и 2. 1 вариант : $f(0) = 0$, $f(f(0)) = f(0) = 0 \neq 3$ - вариант не подходит.

2 вариант : $f(0)=3, f(f(0))=f(3)=0$
При $n=3$
$f(3)+f(f(3))=9$
$\underbrace{f(3)}_{0}+\underbrace{f(0)}_{3}=9$
$0+3\neq 9$
Вариант не подходит.

3 вариант : $f(0)=2, f(f(0))=f(2)=1$
При $n=2$
$f(2)+f(f(2))=7$
$\underbrace{f(2)}_{1}+f(1)=7$
$f(1)=6$
При $n=1$
$f(1)+f(f(1))=5$
$\underbrace{f(1)}_{6}+f(6)=5$
$f(6)=-1$
Вариант не подходит.

4 вариант : $f(0)=1, f(f(0))=f(1)=2$
Тогда $f(n)=n+1$. Доказываем при помощи метода математической индукции:
$f(k)+f(f(k))=2k+3$
$k+1+f(k+1)=2k+3$
$k+1+k+1+1=2k+3$
$2k+3=2k+3$
Подставим $k+1$
$f(k+1)+f(f(k+1))=2(k+1)+3$
$k+2+f(k+2)=2k+2+3$
$k+2+k+3=2k+5$
$2k+5=2k+5$
Доказано, что $f(n)=n+1$ при помощи метода математической индукции. Следовательно, **Ответ:** $f(2022)=2023$.

▷ **4.** Найти сумму всех натуральных x, удовлетворяющих неравенству

$$x^3+10000x\leq 100x^2+333333, (3).$$

Решение:

$$x^3-100x^2+10000x\leq\frac{1000000}{3}$$

$$3x^3-300x^2+30000x\leq 10^6$$

$$3\left(\frac{x}{100}\right)^3-3\left(\frac{x}{100}\right)^2+3\left(\frac{x}{100}\right)\leq 1$$

$$\left(\frac{x}{100}\right)^3\left[\left(\frac{100}{x}\right)^3-3\left(\frac{100}{x}\right)^2+3\left(\frac{100}{x}\right)-3\right]\geq 0$$

$$\left(\frac{x}{100}\right)\left[\left(\frac{100}{x}-1\right)^3-2\right]\geq 0, x\in N\Rightarrow\frac{x}{100}>0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{100}{x}-1\geq\sqrt[3]{2}\Leftrightarrow\frac{100}{x}\geq 1+\sqrt[3]{2}\Leftrightarrow x\leq\frac{100}{1+\sqrt[3]{2}}$$

$$12<\sqrt[3]{2000}<13$$

$$12^3=1728, 13^3=2197$$

$$1,2<\sqrt[3]{2}<1,3$$

$$12,5^3=1953,125$$

$$12,6^3=2000,376$$

$$2,2<1+\sqrt[3]{2}<2,3$$

$$43,4 < \frac{100}{2,3} < 43,5$$

$$\frac{100}{2,3} < \frac{100}{1+\sqrt[3]{2}} < \frac{100}{2,2}$$

$$45,4 < \frac{10}{2,2} < 45,5$$

$$12,6^3 = (12\frac{3}{5})^3 = \frac{63^3}{125} = \frac{250047}{125} = 2000,376; 1,25 < \sqrt[3]{2} < 1,26$$

$$44,2 < \frac{100}{2,26} < \frac{100}{1+\sqrt[3]{2}} < \frac{100}{2,25} = 44,(4) < 44,4; 0,4424 < \frac{1}{1+\sqrt[3]{2}} < 0,4444$$

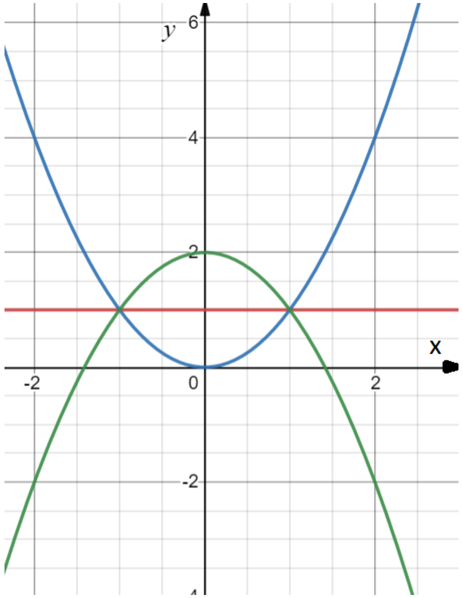
$$x = 1, ..., 44; S = \frac{44+1}{2} \cdot 44 = 45 \cdot 22 = 990$$

▷ **5.** Пусть m – число непрерывных, а n – число непрерывных и ограниченных на $(-\infty;+\infty)$ решений уравнения $y^3+2(1+x^2)y+x^4 = 3y^2+x^4y+2x^2$. Найдите $\frac{m}{n}$.

Решение:

$$(y-1)\left[(y-1)^2-(x^2-1)^2\right] = 0$$

$$\left[\begin{array}{c} y = 1 \\ y = x^2 \\ y = -x^2+1+1 = 2-x^2 \end{array}\right.$$



$3^3 = 27 = m$

$1 \cdot 3 \cdot 1 = n$

$\frac{m}{n} = 9$ **Ответ:** $\frac{m}{n} = 9$.

▷ **6.** На плоскости отмечены три вершины квадрата и разрешается применять центральные симметрии относительно взятых точек и точек, построенных при применении этих симметрий. Можно ли такими построениями получить четвёртую вершину квадрата?

Решение:

Введём на плоскости систему координат таким образом, чтобы заданными вершинами были точки (0,0), (1,0) и (0,1). Если координаты некоторой точки $A(x, y)$ – целые, то точкой, симметричной ей относительно точки $B(a, b)$, будет точка $A'(2a-x, 2b-y)$. Поэтому координаты точки A' имеют ту же самую чётность, что соответствующие координаты точки A. Но из данных вершин с помощью разрешённых центральных симметрий нельзя построить точки с двумя нечетными координатами, т.е. четвёртую вершину (1,1) получить нельзя.

▷ **7.** Искусственный интеллект (из Сколково) "Роботы Вася и Василиса" после трудовой недели занялись любимом делом – образованием новых десятичных дробей из заданной бесконечной десятичной дроби. Василиса выбирает случайным образом любое натуральное число k, не превосходящее 2022, а Вася проделывает последовательно k раз операцию: из полученной дроби удаляет все цифры, стоящие на нечётных местах после запятой. Какова вероятность, что из дроби $0,(\overline{a_1a_2...a_{35}})$ после k операций снова получится эта же дробь?

Решение: После первого вычёркивания останутся цифры, стоящие в исходной дроби на чётных местах, после второго - цифры, стоящие на местах, номера которых делятся на 4, и вообще, после k-го вычёркивания останутся цифры, стоящие в исходной дроби на местах с номерами, кратными 2^k, т.е. с номерами 2^k, $2 \cdot 2^k$, $3 \cdot 2^k$, $4 \cdot 2^k$ и т.д.
Для того, чтобы получилась исходная дробь, надо, чтобы цифра с номером 2^k совпадала с a_1, а для этого достаточно, чтобы 2^k отличалось от 1 на число, кратное 35. Легко проверить, что таким числом будет, например, $k = 12$. При этом разности $2 \cdot 2^{12} - 2$, $3 \cdot 2^{12} - 3$, ..., $35 \cdot 2^{12} - 35$ также делятся на 35, и поэтому первые оставшиеся 35 цифр образуют период исходной дроби.
Таким образом, после 12 вычеркивания мы получаем исходную дробь.
$12, 24, ..., 12 + 12(n-1) \leqslant 2022$
$12n \leqslant 2022$
$2022 = 12 \cdot 168 + 6$
$n = 168$
$p = \frac{168}{2022} = \frac{28}{337}$

▷ **8.** Оцените, не используя вычислительные средства, что больше: $1+\sin 2022$ или $\sin 2023$.

Решение:
$f(x) = x + cosx \uparrow$
$f'(x) = 1 - sinx \geqslant 0$
$f(2022) = 2022 - sin2022$
$f(2023) = 2023 - sin2023$
$2022 - sin2022 > 2023 - sin2023$
$sin2023 > 1 + sin2022$

▷ **9.** Три ненулевых вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ связаны зависимостью

$$\left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}\right)\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a})\overrightarrow{b} + \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$$

Найти множество значений $\alpha + \beta + \gamma$, где α – угол между $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$, β – угол между $\overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{a}$, γ – угол между $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

Решение:
Разделив левую часть равенства на $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|$, получим

$$cos\alpha\overrightarrow{e}_1 + cos\beta\overrightarrow{e}_2 + cos\gamma\overrightarrow{e}_3 = \overrightarrow{0}$$

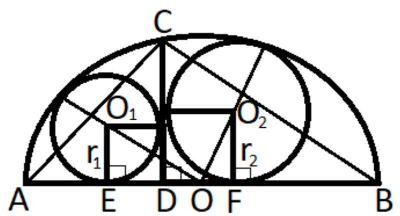
где $\overrightarrow{e}_1 = \overrightarrow{a} :|\overrightarrow{a}|$, $\overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{b} :|\overrightarrow{b}|$, $\overrightarrow{e}_3 = \overrightarrow{c} :|\overrightarrow{c}|$. 1) Если один из косинусов в равенстве равен нулю, то и два друих косинуса также равны нулю. Действительно, если $cos\alpha = 0$, то $\overrightarrow{e}_2 \perp \overrightarrow{e}_3$, причём $cos\beta\overrightarrow{e}_2 + cos\gamma\overrightarrow{e}_3 = \overrightarrow{0}$. Отсюда следует, что $cos\beta = cos\gamma = 0$. В этом случае имеем $\alpha = \beta = \gamma = 90°$
2) Пусть $cos\alpha cos\beta cos\gamma \neq 0$. Умножив левую часть равенства скалярно на $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$ и $\overrightarrow{e}_3$, получим

$$\begin{cases} cos\alpha + 2cos\beta cos\gamma = 0, \\ cos\beta + 2cos\gamma cos\alpha = 0, \\ cos\gamma + 2cos\alpha cos\beta = 0. \end{cases}$$

Из этой системы найдём α, β и γ. Для этого заметим, что либо все углы тупые, либо только один из них тупой. Исключив из первых двух уравнений $cos\beta$, получим $4cos^2\gamma = 1$, или $cos^2\gamma = \frac{1}{4}$. Аналогично, $cos^2\alpha = \frac{1}{4}$, $cos^2\beta = \frac{1}{4}$. Следовательно, имеем: $\alpha = \beta = \gamma = 120°; \alpha = 120°, \beta = \gamma = 60°; \alpha = \gamma = 60°, \beta = 120°; \alpha = \beta = 60°, \gamma = 120°; \alpha = \beta = \gamma = 90°$. **Ответ:** $\{240°, 270°, 360°\}$

▷ **10.** Даны полуокружность с диаметром AB и произвольная точка C этой полуокружности. Прямая CD перпендикулярна к прямой AB (точка D принадлежит диаметру AB). Известно, что r_1 и r_2 – радиусы окружностей, вписанных в криволинейные треугольники ACD и BCD. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение:
Пусть $|AD| = a$, $|BD| = b$, E и F - соответственно точки касания окружностей радиусов r_1 и r_2 с прямой AB, O - середина диаметра AB.



Из треугольника OO_1E имеем

$$|EO_1|^2 + |EO|^2 = |OO_1|^2$$

или

$$r_1^2 + \left(r_1 - \frac{1}{2}(a-b)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(a+b) - r_1\right)^2$$

Из полученного квадратного уравнения

$$r_1^2 + 2br_2 - ab = 0$$

находим

$$r_1 = \sqrt{ab + b^2} - b$$

Аналогично из рассмотрения прямоугольного треугольника OO_2F получаем

$$r_2 = \sqrt{ab + a^2} - a$$

Вычислим радиус r окружности, вписанной в треугольник ABC:

$$r = \frac{2S}{2p} = \frac{\mid AC \mid \cdot \mid BC \mid}{\mid AC \mid + \mid BC \mid + \mid AB \mid} =$$

$$= \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{\sqrt{(a+b)a} + \sqrt{(a+b)b} + (a+b)} = \frac{\sqrt{ab(a+b)}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a+b}} =$$

$$= \frac{\sqrt{ab(a+b)}(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a+b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (a+b)} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{a(a+b)} + \sqrt{b(a+b)} - a - b) = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$$

Ответ: $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$